

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

УДК 621.391

В.Г. Лабунец¹, В.П. Часовских¹, Е. Остхаймер²

¹Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург

²Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach, 33062 Florida, USA

**БЫСТРЫЕ ДРОБНЫЕ И МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ФУРЬЕ, УОЛША И ХААРА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ OFDM-СИСТЕМ**



Ключевые слова: *Дробные и многопараметрические Фурье, Уолша, Виленкина Крестенсона и Хаара базисы и преобразования. TDMA, FDMA, MC-CDMA, OFDM - телекоммуникационные системы.*

В данной работе мы вводим так называемые дробные и многопараметрические Фурье, Уолша, Виленкина Крестенсона и Хаара преобразования для перспективных обобщенных GOFDM-телекоммуникационных систем.

V.G. Labunets¹, V.P. Chasovskikh¹, E.Osthaimer²

**FAST FRACTION AND MULTIPARAMETER FOURIER, WALSH AND HAAR
TRANSFORMS FOR GENERALIZED OFDM SYSTEMS**

Keywords: *Fractional and multiparameter Fourier, Walsh Chrestenson-Vilenkin, Haar Transforms, TDMA, FDMA, MC-CDMA, OFDM telecommunication systems.*

In this work we introduce a new class so called multiparameter and fractional Walsh, Chrestenson-Vilenkin and Haar transforms for perspective generalized GOFDM-telecommunication systems.

Лабунец Валерий Григорьевич – доктор технических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ, профессор кафедры теоретических основ радиотехники Уральского федерального университета (Екатеринбург). Тел.: +7-953-383-37-64; e-mail: vlabunets@yahoo.com.

Labunets Valery Grigor'evch – Doctor of technical sciences, Professor, Ural Federal University (Yekaterinburg). Phone: +7-953-383-37-64; e-mail: vlabunets05@yahoo.com

Часовских Виктор Петрович - доктор технических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ, член Российской академии инженерных наук им. А.М. Прохорова, член Российской академии естественных наук, FullMemberofEuropeanAcademyofNaturalHistory, директор Института экономики и управления Уральского государственного лесотехнического университета (Екатеринбург). Тел. (343)261-46-44; e-mail: u2007u@ya.ru.

Chasovskikh Viktor Petrovich - Doctor of technical sciences, Professor, Director of the Institute of Economics and Management, Ural State Forest Engineering University (Yekaterinburg). Phone: (343)261-46-44; e-mail: u2007u@ya.ru.

Остхаймер Екатерина – доктор философии по компьютерным наукам, директор фирмы Capricat LLC (Флорида, США). Тел.: +7-953-383-37-64; e-mail: katya@capricat.com

Osthaimer Ekaterina - Doctor of Philosophy in Computer Science, Director of Capricat LLC (Pompano Beach 33062 Florida USA). Phone: +7-953-383-37-64; e-mail:katya@capricat.com

Введение

Дискретные ортогональные преобразования нашли широкое применение в системах коллективного доступа, таких, как TDMA, FDMA, MC-CDMA, OFDM. В этих системах передаваемые сигналы являются суммами некоторого числа базисных сигналов из некоторого ортогонального сигнального базиса (например, дельта-функций в TDMA, тригонометрических в FDMA и OFDM или функции Уолша в MC-CDMA). С теоретической точки зрения нет особых ограничений на использование произвольных базисных функций. Телекоммуникационные системы, в которых используются такие базисные функции будем называть GOFDM-системами (Generalized Orthogonal frequency-division multiplexing – мультиплексирование с ортогональным обобщенным частотным разделением каналов). Таким образом, в GOFDM-системах могут использоваться произвольные ортогональные базисные сигналы.

Пусть $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \in \mathbf{Z}_m^N$ – N -мерный входной вектор в GOFDM-системе (рис. 1), где $c_i \in \mathbf{Z} / m\mathbf{Z} = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Передаваемый GOFDM-сигнал является комплексно-значной функцией вида

$$s_c(t) = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{c_k} \varphi_k(t) = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k \varphi_k(t) \quad (1)$$

где $\varepsilon := \sqrt[m]{1} = e^{j2\pi/m}$, $\tilde{c}_i = \varepsilon^{c_i}$ (т.е. $\tilde{c}_i \in \{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{m-1}\}$) и $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$ — ортонормированный базис комплексно-значных сигналов.

Последовательность $\mathbf{c} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ называется m -арным кодовым словом. Для $m=2$ имеет место бинарная модуляция, производящая бинарные (± 1) – GOFDM-кодовые слова. Для $m=4$ имеет место четверичная модуляция, производящая четверичные GOFDM-кодовые слова. Для классической OFDM базисные функции – обычные гармонические сигналы $\varphi_k(t) = e^{j(k\Delta\omega)t}$. В этом случае выражение (1) представляет собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$s_c(t) = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{c_k} \varphi_k(t) = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k e^{j(k\Delta\omega)t} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k e^{j(\omega_0 + k\Delta\omega)t}. \quad (2)$$

Здесь N функций $\varphi_k(t) = e^{j(\omega_0 + k\Delta\omega)t}$ ортогональны на интервале $t \in [0, 2\pi/\Delta\omega]$.

Обычно $N = 2^n$ – степень двойки, поскольку в этом случае можно использовать быстрое ДПФ. Для TDMA базисные функции являются дельта-функции Дирака.

Система MC-CDMA отличается от выше описанных классических OFDM и TDMA систем тем, что в ней вместо гармонических сигналов или дельта-функций Дирака используются функции Уолша и соответствующее им дискретное преобразование Уолша:

$$s_c(t) = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{c_k} \text{Wal}_k(t), \quad (3)$$

где $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \in \mathbf{Z}_2^N$

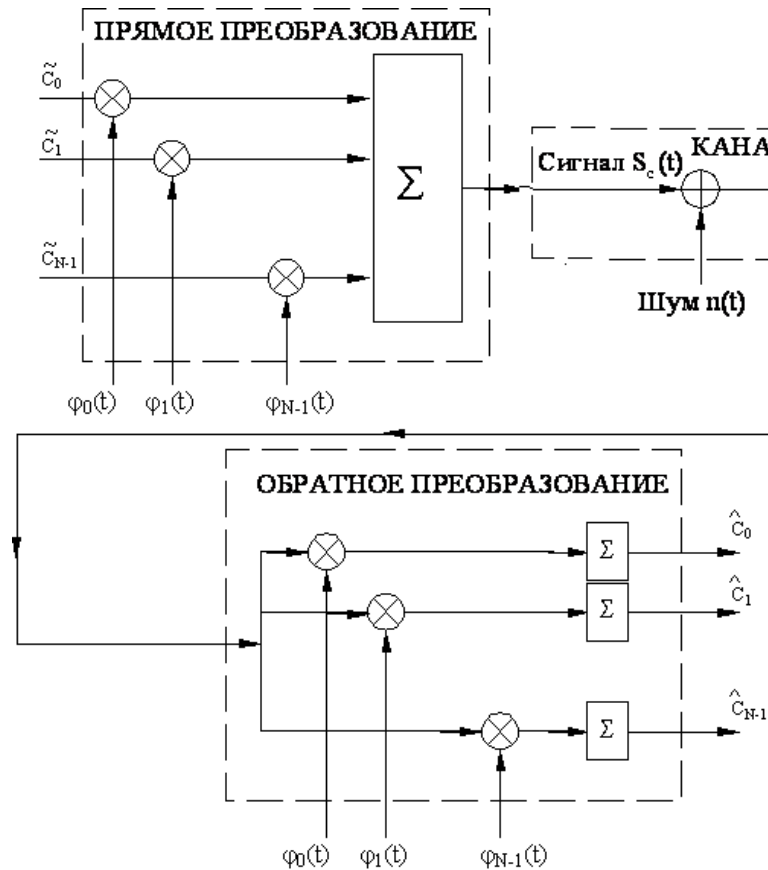


Рис. 1. Блок-схема GOFDM.

В этой работе мы предлагаем использовать в GOFDM-системе в качестве поднесущих сигналов $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$ многопараметрические базисные функции $\{\varphi_k(t | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)\}_{k=0}^{N-1}$ многопараметрического и дробного преобразований Фурье, Уолша и Вейвлет-Хаара. При плавном изменении параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ меняются базисные функции, и вслед за ними будет изменяться GOFDM-система, принимая облик и свойства любой из выше названных систем.

Дробное и многопараметрическое преобразования Фурье

Идея о дробных степенях оператора Фурье появилась в математической литературе в начале XX века (Wiener, 1929; Condon, 1937). В 1937 году в работе Е. Кондона (Condon, 1937) было впервые предложено так называемое дробное преобразование Фурье (ДрПФ) для решения задач квантовой механики. Позже, в 1961 году В. Баргманн (Bargmann, 1961) дал более точное определение этого преобразования, основанное на многочленах Эрмита. Если $H_n(\sqrt{2\pi}t)$ – многочлены Эрмита порядка n , то функции:

$$\Psi_n(t) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi}t) e^{-\pi t^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

– суть собственные функции преобразования Фурье: $\mathcal{F}[\Psi_n(t)] = \lambda_n \Psi_n(\omega)$ соответствующие собственным значениям $\lambda_n = i^n$. Они формируют ортогональный набор функций на интервале $(-\infty, \infty)$ относительно весовой функции $e^{\pi t^2}$, поскольку

$$\langle \Psi_n(t) | \Psi_m(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi t^2} \Psi_n(t) \Psi_m(t) dt = \delta_{mn}. \quad (5)$$

Очевидно, преобразование Фурье имеет следующее собственное разложение

$$\mathcal{F} = [\varphi_\omega(t)] := \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{4}n} \Psi_n(\omega) \Psi_n(t) \right] = [e^{j\omega t}]. \quad (6)$$

Согласно В. Баргманну ДрПФ \mathcal{F}^α определяется через его собственные функции следующим образом:

$$\mathcal{F}^{(\alpha)} = [\varphi_\omega(t|\alpha)] := \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{4}\alpha n} \Psi_n(\omega) \Psi_n(t) \right] = \frac{e^{\frac{j\pi}{4}(\alpha - \text{sgn} \sin \frac{\pi\alpha}{2})}}{\sqrt{\sin \frac{\pi\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \left[e^{j\pi \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\omega^2 - 2\omega t \csc(\pi\alpha) + t^2)} \right], \quad (7)$$

где $\varphi_\omega(t|\alpha)$ – ядро ДрПФ, а $\Psi_n(t)$ его собственные функции, соответствующие новым собственным значениям $\lambda_n^\alpha = e^{j\frac{2\pi}{4}\alpha n}$ (старые собственные значения, возведенные в дробную степень α). Для $\alpha = 1$ $\varphi_\omega(t|1) = e^{j\omega t}$ и ДрПФ принимает облик классического преобразования Фурье. При $\alpha = 0$ оно вырождается в тождественное преобразование. Таким образом, при непрерывном изменении параметра α ДрПФ плавно меняет облик от тождественного преобразования до обычного преобразования Фурье, а GOFDM-система, в которой в качестве сигналов $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$ используются базисные сигналы $\varphi_\omega(t, \alpha)$, превращается из FDMA в TDMA. При $\alpha = 0,5$ система представляет собой уже некоторый гибрид обеих этих систем.

Примечание 1. В 1980 г. В. Намиас заново открыл дробное преобразование Фурье (Namias, 1980). В своей работе, посвященной использованию дробного ПФ для решения некоторых задач, связанных с квантовыми гармоническими колебаниями, он представил операционное исчисление этого преобразования. Его подход был расширен Мак Брайдом и Керром в 1987 г. (McBride, Kerr, 1987). Позже, в 1993 г. Х. Озактас и Д. Мендлович предложили дробное преобразование в оптике (Ozaktas, Mendlovic, 1993). На сегодняшний день дробное ПФ нашло широкое применение в разных областях науки и техники (Ervin et al., 2011).

Количество свободных параметров у ДрПФ \mathcal{F}^α можно увеличить, делая все собственные значения различными

$$\mathcal{F}^{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})} = [\varphi_\omega(t|\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})] := \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{4}\alpha_n} \Psi_n(\omega) \Psi_n(t) \right] \quad (8)$$

где $\varphi_{\omega}(t | \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$ – ядро многопараметрического преобразования Фурье, а $\Psi_n(t)$ его собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_n = e^{j\frac{2\pi}{4}\alpha_n}$. В этом случае GOFDM-система, будет оснащена поднесущими, зависящими не от одного, а от нескольких параметров $\varphi_{\omega}(t | \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$.

Дробные и многопараметрические преобразования Уолша

Пусть $\mathcal{F} = [F_k(i)]_{k,t=0}^{N-1}$ – произвольное дискретное симметричное $(N \times N)$ –преобразование, λ_n и $\Psi_n(t)$ – его собственные значения и собственные векторы, где $n = 0, 1, \dots, N-1$. Пусть

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \Psi_0(i) & \Psi_1(i) & \vdots & \Psi_{N-1}(i) \\ | & | & & | \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad (9)$$

- матрица, составленная из собственных векторов \mathcal{F} -преобразования. Тогда $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{U} = \text{Diag}\{\lambda_n\}$ представляет собой собственное разложение преобразования $\mathcal{F} = [F_k(i)]_{k,t=0}^{N-1}$. Следовательно, $\mathcal{F} = [F_k(i)] := \mathcal{U} \Lambda \mathcal{U}^{-1}$. Если $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ – произвольные вещественные числа, то выражение

$$\mathcal{F}^{(\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1})} := \mathcal{U} \left\{ \text{diag}(\lambda_0^{\alpha_0}, \dots, \lambda_{N-1}^{\alpha_{N-1}}) \right\} \mathcal{U}^{-1} \quad (10)$$

назовем *многопараметрическим дробным \mathcal{F} – преобразованием*. Если $\alpha_i \equiv \alpha$, для всех $i = 0, 1, \dots, N-1$, то такое преобразование назовем *дробным \mathcal{F} – преобразованием*.

Пусть $\mathcal{W}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, тогда $\mathcal{W}_{2^n} := \mathcal{W}_2 \otimes \mathcal{W}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{W}_2$ является $(2^n \times 2^n)$ -преобразованием Уолша. Для \mathcal{W}_2 имеет место собственное разложение:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & \sin(\pi/8) \\ -\sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} = \\ &= c s_2(\pi/8) D_2(1, -1) c s_2(\pi/8), \end{aligned} \quad (11)$$

которое позволяет ввести следующее двухпараметрическое преобразование

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2(\alpha_1, \alpha_2) &= c s_2(\pi/8) D_2(\alpha_1, \alpha_2) c s_2(\pi/8) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2j\pi\alpha_1} & \\ & e^{2j\pi\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & \sin(\pi/8) \\ -\sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Тензорно перемножая его n раз, получаем $2n$ -параметрическое преобразование Уолша

$$\mathcal{W}_{2^n}^{(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \dots, \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n})} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{W}_2(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}) = \prod_{i=1}^n [I_{2^{i-1}} \otimes \mathcal{W}_2(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}) \otimes I_{2^{n-i}}], \quad (13)$$

Подставляя (12) в (13), получаем быстрое дробное преобразование Уолша

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2^n}^{(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}; \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}; \dots; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n})} &= \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{W}_2(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}) = \prod_{i=1}^n [I_{2^{i-1}} \otimes \mathcal{W}_2(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}) \otimes I_{2^{n-1}}] = \\ &= \prod_{i=1}^n [I_{2^{i-1}} \otimes cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-1}}] \left[\bigotimes_{i=1}^n D_2(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}) \right] \prod_{i=1}^n [I_{2^{i-1}} \otimes cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-1}}]. \end{aligned} \quad (14)$$

Количество параметров в выражении (14) можно увеличить с $2n$ до 2^n , используя вместо диагональной матрицы тензорной структуры $\left[\bigotimes_{i=1}^n D_2(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}) \right]$ диагональную матрицу общего вида с 2^n свободными параметрами $\left[D_{2^n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n}) \right]$, что дает новое 2^n -параметрическое дробное быстрое преобразование Уолша с неразделимой диагональной матрицей

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2^n}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n})} &= \\ &= \prod_{i=1}^n [I_{2^{i-1}} \otimes cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-1}}] \left[D_{2^n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n}) \right] \prod_{i=1}^n [I_{2^{i-1}} \otimes cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-1}}]. \end{aligned} \quad (15)$$

При плавном изменении $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n})$ многопараметрическое преобразование Уолша $\mathcal{W}_{2^n}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n})}$ плавно меняет форму от тождественного преобразования до классического преобразования Уолша.

Многопараметрические преобразования Крестенсона-Виленкина

Как и преобразование Уолша, преобразование Крестенсона-Виленкина $(m^n \times m^n)$ имеет тензорную структуру. Например, для $m=3$ это преобразование задается следующим образом:

$$\mathbf{C}_{3^n} := \mathbf{C}_3 \otimes \mathbf{C}_3 \otimes \dots \otimes \mathbf{C}_3, \quad (16)$$

$$\text{где } \mathbf{C}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix} \text{ и } \otimes - \text{ символ тензорного произведения. Собственное раз-}$$

ложение для \mathbf{C}_3 имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ & & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ & -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \\ &= \bar{\mathbf{R}}_{12} \bar{\mathbf{R}}_{01} \mathbf{D}_3(1, -1, j) \mathbf{R}_{01} \mathbf{R}_{12}, \end{aligned}$$

где $\bar{\mathbf{R}}_{12}, \mathbf{R}_{12}$ – матрицы вращения на углы $\mp\pi/4$, а $\bar{\mathbf{R}}_{01}, \mathbf{R}_{01}$ – матрицы вращения на углы $\pm\theta$, $\theta = \frac{1}{2} \arctg(\sqrt{2})$ соответственно. Введем следующее трехпараметрическое преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \bar{\mathbf{R}}_{12} \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \mathbf{D}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \mathbf{R}_{01} \mathbf{R}_{12} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{2j\pi\alpha_1} & & \\ & e^{j\pi\alpha_2} & \\ & & e^{j\frac{\pi}{2}\alpha_3} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ & -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тензорно перемножая его n раз, получаем $3n$ -параметрическое преобразование Крестенсона-Виленкина:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{3^n}^{(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}; \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}; \dots; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})} &= \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{C}_3(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \alpha_{3,i}) = \\ &= \prod_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{C}_3(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \alpha_{3,i}) \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}]. \end{aligned}$$

Собственное разложение этого преобразования представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{3^n}^{(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}; \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}; \dots; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})} &= \\ &= \prod_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \bar{\mathbf{R}}_{12} \bar{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}] \times [\mathbf{D}_3(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_3(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})] \times \\ &\times \prod_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01} \mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}] = \\ &= \prod_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \bar{\mathbf{R}}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}] \times \prod_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \bar{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}] \times \\ &\times [\mathbf{D}_2(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_2(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})] \times \\ &\times \prod_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}] \times \prod_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Как и в преобразовании Уолша, количество параметров в выражении (17) можно увеличить с $3n$ до 3^n , используя вместо матрицы тензорной структуры $\mathbf{D}_2(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_2(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})$ диагональную матрицу общего вида с 3^n свободными параметрами $\mathbf{D}_{3^n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3^n})$, что дает новое многопараметрическое (3^n -параметрическое) быстрое преобразование Крестенсона-Виленкина с неразделимой диагональной матрицей:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{C}_{3^n}^{(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}; \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}; \dots; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})} = \\
 &= \prod_{i=1}^n \left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \bar{\mathbf{R}}_{12} \bar{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}} \right] \left[\mathbf{D}_{3^n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3^n}) \right] \prod_{i=1}^n \left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01} \mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}} \right] = \\
 &= \prod_{i=1}^n \left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \bar{\mathbf{R}}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}} \right] \times \prod_{i=1}^n \left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \bar{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}} \right] \times \\
 &\times \left[\mathbf{D}_{3^n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3^n}) \right] \times \\
 &\times \prod_{i=1}^n \left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}} \right] \times \prod_{i=1}^n \left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}} \right].
 \end{aligned}$$

При плавном изменении параметров $(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}; \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}; \dots; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})$ многопараметрическое преобразование $\mathbf{C}_{3^n}^{(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}; \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}; \dots; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,n})}$ плавно меняет форму от тождественного преобразования до классического преобразования Крестенсона-Виленкина.

Дробные и многопараметрические вейвлет-преобразования Хаара

Пусть $\mathcal{M} = [M_k(i)]_{\omega, i=0}^{N-1}$ – произвольное несимметричное дискретное обратимое $(N \times N)$ - преобразование. Сформируем два произведения $\mathcal{M}\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^+\mathcal{M}$, где «+» – символ эрмитова сопряжения. Эти преобразования симметричны и, следовательно, имеют собственные разложения: $\mathcal{M}\mathcal{M}^+ = \mathcal{V}D\mathcal{V}^+$, $\mathcal{M}^+\mathcal{M} = \mathcal{W}D\mathcal{W}^+$, где $D := \text{diag}\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}\}$ - диагональная матрица сингулярных чисел. Тогда \mathcal{M} имеет следующее сингулярное разложение $\mathcal{M} = \mathcal{V}\Lambda\mathcal{W}^+$, где

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \Phi_0(i) & \Phi_1(i) & \vdots & \Phi_{N-1}(i) \\ | & | & & | \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \Psi_0(i) & \Psi_1(i) & \vdots & \Psi_{N-1}(i) \\ | & | & & | \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad (18)$$

- матрицы собственных векторов преобразований $\mathcal{M}\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^+\mathcal{M}$, соответственно, и $\Lambda = \sqrt{D} := \text{diag}\{\sqrt{\sigma_0}, \sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_{N-1}}\} = \text{diag}\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$.

Если $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ – произвольные вещественные числа, то преобразование

$$\mathcal{M}^{(\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1})} := \mathcal{V} \left\{ \text{diag}(\lambda_0^{\alpha_0}, \dots, \lambda_{N-1}^{\alpha_{N-1}}) \right\} \mathcal{W}^+ \quad (19)$$

назовем *многопараметрическим \mathcal{M} -преобразованием*. Воспользуемся этим разложением для получения многопараметрического и дробного вейвлет-преобразования Хаара (ВПХ). ВПХ может быть определено с использованием классического дискретного преобразования Хаара:

$$\mathcal{DWT}_{2^n} = \prod_{i=1}^n [(\mathcal{W}_2 \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}}] P_{2^n} \quad (20)$$

где $\mathcal{W}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ – суть (2×2) –преобразование Уолша, P_{2^n} – так называемая мат-

рица «идеального» перемешивания: $P_{2^n} = \prod_{i=2}^n (I_{2^{n-i}} \otimes P_4 \otimes I_{2^{i-2}})$, а P_4 – оператор «bit swap», т.е. $P_4(i_1, i_0) := (i_0, i_1)$. Для \mathcal{W}_2 имеет место собственное разложение:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & \sin(\pi/8) \\ -\sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} = \\ &= cs_2(\pi/8) D_2(1, -1) cs_2(\pi/8), \end{aligned} \quad (21)$$

которое дает собственное разложение \mathcal{DWT}_{2^n} :

$$\begin{aligned} \mathcal{DWT}_{2^n} &= \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) D_2(1, -1) cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot P_{2^n} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \prod_{i=1}^n \left[(D_2(1, -1) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot \\ &\cdot \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] P_{2^n} = \mathcal{V} \Lambda \mathcal{W}^+ \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя в (22) вместо \mathcal{W}_2 выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2(\alpha_1, \alpha_2) &= cs_2(\pi/8) D_2(\alpha_1, \alpha_2) cs_2(\pi/8) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2j\pi\alpha_1} & \\ & e^{2j\pi\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & \sin(\pi/8) \\ -\sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

получаем $2n$ -параметрическое ВПХ

$$\begin{aligned} \mathcal{DWT}_{2^n}^{(\alpha_{11}, \alpha_{21}; \alpha_{12}, \alpha_{22}; \dots; \alpha_{1n}, \alpha_{2n})} &= \mathcal{V} \cdot \Lambda(\alpha_{11}, \alpha_{21}; \alpha_{12}, \alpha_{22}; \dots; \alpha_{1n}, \alpha_{2n}) \cdot \mathcal{W}^+ \\ &= \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) D_2(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot P_{2^n} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot \prod_{i=1}^n \left[(D_2(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot \\ &\cdot \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot P_{2^n} = \mathcal{V} \cdot \Lambda(\alpha_{11}, \alpha_{21}; \dots; \alpha_{1n}, \alpha_{2n}) \cdot \mathcal{W}^+, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right], \\ \mathcal{W}^+ &= \prod_{i=1}^n \left[(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] P_{2^n}, \\ \Lambda(\alpha_{11}, \alpha_{21}; \dots; \alpha_{1n}, \alpha_{2n}) &= \prod_{i=1}^n \left[(D_2(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) \otimes I_{2^{n-i}}) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Количество параметров в выражении (25) можно увеличить с $2n$ до 2^n , используя вместо диагональной матрицы тензорной структуры $(D_2(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) \otimes I_{2^{n-i}})$ диагональную

матрицу общего вида с 2^n свободными параметрами $\left[\Lambda_{2^n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n}) \right]$, что дает новое 2^n -параметрическое дробное быстрое ВПХ с неразделимой диагональной матрицей

$$\begin{aligned} \mathcal{DWT}_{2^n}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n})} &= \mathcal{V} \cdot \Lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n}) \cdot \mathcal{W}^+ = \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\left(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}} \right) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot \Lambda(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{1n}, \alpha_{2n}) \cdot \\ &\cdot \prod_{i=1}^n \left[\left(cs_2(\pi/8) \otimes I_{2^{n-i}} \right) \oplus I_{2^n - 2^{n-i+1}} \right] \cdot P_{2^n}. \end{aligned} \quad (26)$$

При плавном изменении параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n})$ многопараметрическое ВПХ плавно меняет форму от тождественного преобразования до классического вейвлет-преобразования Хаара, что позволяет, во-первых, ввести адапционные свойства в спектральный анализ сигналов и, во-вторых, создать многопараметрическую МС-CDMA.

Заключение

Представлен систематический метод синтеза многопараметрических симметричных и несимметричных преобразований, базисные функции которых могут быть использованы в качестве поднесущих в обобщенных OFDM и CDMA системах.

Acknowledgment

This work was supported by grants the RFBR № 17-07-00886, № 17-29-03369 and by Ural State Forest Engineering's Center of Excellence in "Quantum and Classical Information Technologies for Remote Sensing Systems".

Список использованной литературы

- Bargmann V.* On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part 1 // Commun. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14. P. 187–214.
- Condon E.U.* Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transforms // Proc. Nat. Acad. Sci. 1937. Vol. 12. P. 158–164.
- Ervin S., Igor D., Ljubisa S.* Fractional Fourier Transform as a Signal Processing Tool: An Overview of Recent Developments // Signal Processing. 2011. Vol. 91. P. 1351–1369.
- McBride A.C., Kerr F.H.* On Namias' fractional Fourier transforms // IMA J. Appl. Math. 1987. Vol. 39. P. 131–265.
- Namias V.* The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics // J. Inst. Math. Appl. 1980. Vol. 25. P. 131–265.
- Ozaktas H.M., Mendlovic D.* Fourier transform of fractional order and their optical interpretation // Opt. Commun. 1993. Vol. 110. P. 163–169.
- Wiener N.* Hermitian polynomials and Fourier analysis // J. Math. Phys. 1929. Vol. 8. P. 70–73.

Рецензент статьи: доктор технических наук, профессор Института радиоэлектроники и информационных технологий Уральского федерального университета Л.Г. Доросинский.

В.Г. Лабунец¹, В.П. Часовских¹, Е.Остхаймер²

¹Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург

²Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach, 33062 Florida, USA

**УНИФИЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД К КОМПЛЕМЕНТАРНЫМ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ.
ЧАСТЬ 1. МУЛЬТИПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ГОЛЕЯ-РУДИНА-ШАПИРО**

Ключевые слова: *обобщенные комплементарные последовательности, многопараметрические преобразования Фурье-Голя-Рудина-Шапира, TDMA, FDMA, MC-CDMA, OFDM -телекоммуникационные системы.*

В данной работе мы разрабатываем новый унифицированный подход к синтезу так называемых обобщенных последовательностей Голя-Рудина-Шапира. Он основывается на новой итерационной генерирующей конструкции.

V.G. Labunets, V.P. Chasovskikh, E.Osthaimer

**UNIFIED APPROACH TO COMPLEMENTARY SEQUENCES AND
TRANSFORMS. PART 1. MULTIPARAMETRIC GOLAY-RUDIN-SHAPIRO
TRANSFORMS**

Keywords: *generalized complementary sequences, multiparameter Fourier-Golay-Rudin-Shapiro transforms. TDMA, FDMA, MC-CDMA, OFDM-telecommunication systems.*

In this paper we develop a new unified approach to the so-called generalized Golay-Rudin-Shapiro (GRS) sequences. It based on a new generalized iteration generating construction.

Introduction

The basis which has come to be known as the *Golay-Rudin-Shapiro* (GRS) set was introduced in (Byrnes, 1994) to prove the H.S. Shapiro global uncertainty principle of conjecture. Each function in the GRS is called the *Golay-Rudin-Shapiro binary sequence*. They are piecewise ± 1 can change sign only at points of the following form $j/2^n$, $j = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$, $n = 1, 2, \dots$. These basis functions satisfy almost all standard properties of the Walsh functions. Discrete classical *Fourier-Golay-Rudin-Shapiro Transforms* (FGRST) in bases of different Golay-Rudin-Shapiro sequences can be used in many signal processing applications: multi-resolution by discrete orthogonal wavelet decomposition, digital audition, digital video broadcasting, communication systems (Orthogonal Frequency Division Multiplexing - OFDM, Multi-Code-Division Multiple Access - MCDA), radar, and cryptographic systems.

Binary ± 1 -valued GRS sequences (2-GRS) associated with the cyclic group \mathbf{Z}_2 were introduced by Shapiro, Golay and Shapiro in 1949-1951 (Golay, 1949, 1961, 1977; Shapiro,

1951,1958; Rudin, 1959). Golay (1961) gave an explicit construction for binary Golay complementary pairs of length 2^m and later noted (Golay, 1977) that the construction implies the existence of at least $2^m m! / 2$ binary Golay sequences of this length. They are known to exist for all lengths $N = 1^\alpha 10^\beta 26^\gamma$, where α, β, γ are integers and $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ (Turyn, 1974), but do not exist for any length N having a prime factor congruent to the modulo 4 (Eliahou et al., 1990). Budisin (1990) using the earlier work of Sivaswamy (1978) gave a more general recursive construction for Golay complementary pairs and showed that the set of all binary Golay complementary pairs of length 2^m obtainable from it coincides with those given explicitly by Golay. For a survey of results on nonbinary Golay complementary pairs, see (Fan, Darnel, 1996). Recently, Davis and Jedwab (1999) gave an explicit description of a large class of Golay complementary sequences in terms of certain cosets of the first order Reed-Muller codes. The following actors are used for building the classical GRST in bases of classical Golay-Rudin-Shapiro sequences: 1) the Abelian group \mathbf{Z}_2^n , 2) 2-point Fourier transform \mathcal{F}_2 , and 3) the complex field \mathbf{C} ; i.e., these transforms are associated with the triple $(\mathbf{Z}_2^n, \mathcal{F}_2, \mathbf{C})$.

In this work, we develop a new unified approach to the so-called generalized complex- $\mathbf{GF}(p)$ - and Clifford-valued complementary sequences. The approach is based on a new iteration generating construction. This construction has a rich algebraical structure. This construction is associated not with the triple $(\mathbf{Z}_2^n, \mathcal{F}_2, \mathbf{C})$ but rather with other groups instead of \mathbf{Z}_2^n , other unitary transforms instead of \mathcal{F}_2 , and other algebras (Clifford algebras), finite rings (\mathbf{Z}_m) and finite Galois fields $(\mathbf{GF}(q))$ instead of the complex field \mathbf{C} .

New iteration construction for original Golay sequences

We begin by describing the original Golay 2-complementary ± 1 -valued sequences.

Definition 1. Let $\text{com}^0(t) := (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$ and $\text{com}^1(t) := (s_0, s_1, \dots, s_{N-1})$, where $c_i, s_i \in \{\pm 1\}$. The sequences $\text{com}^0(t), \text{com}^1(t)$ are called the 2-complementary ((± 1) -valued) or Goley complementary pair over $\{\pm 1\}$, if $\text{COR}^0(\tau) + \text{COR}^1(\tau) = N\delta(\tau)$, or $\left(|\text{COM}^0(z)|^2 + |\text{COM}^1(z)|^2 \right)_{|z|=1} = N$, where $\text{COR}^0(\tau), \text{COR}^1(\tau)$ are the periodic correlation functions of $\text{com}^0(t), \text{com}^1(t)$ and $\text{COM}^0(z) = \mathbf{Z} \text{com}^0(t)$, $\text{COM}^1(z) = \mathbf{Z} \text{com}^1(t)$ are their \mathbf{Z} -transforms. Any sequence, which is a member of a Golay complementary pair, is called the *Golay sequence*.

We use two symbols α and t for numeration of Golay sequences and discrete time, respectively. For integer α and t we shall use binary representations $\alpha = \alpha_{[n]} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $t = t_{[n]} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, where $\alpha_i, t_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Obviously,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\alpha_1) \in \mathbf{Z}_2, & \mathbf{t}_1 &= (t_1) \in \mathbf{Z}_2, \\ \mathbf{a}_2 &= (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z}_2^2, & \mathbf{t}_2 &= (t_1, t_2) \in \mathbf{Z}_2^2, \\ \mathbf{a}_3 &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{Z}_2^3, & \mathbf{t}_3 &= (t_1, t_2, t_3) \in \mathbf{Z}_2^3, \\ & \dots & \dots & \\ \mathbf{a}_n &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_2^n, & \mathbf{t}_n &= (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{Z}_2^n. \end{aligned}$$

Let $\text{com}_{(\mathbf{a}_n, 0)}(\mathbf{t}_{n+1}), \text{com}_{(\mathbf{a}_n, 1)}(\mathbf{t}_{n+1})$ be a set of 2^n pairs of complementary sequences of length 2^{n+1} . Then the following matrix of depth $n+1$ has size $2^{n+1} \times 2^{n+1}$

$$\mathbf{G}_{2^{n+1}} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0,\dots,0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(0,0,\dots,0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(0,0,\dots,1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(0,0,\dots,1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \dots \\ \text{com}_{(1,1,\dots,1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(1,1,\dots,1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \dots \\ \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix}_{a_n=0}^{2^n-1}. \quad (1)$$

is called the *Golay matrix*, where

$$\begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

are a pair of complementary sequences and $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ is the symbol of the vertical concatenation of $(2 \times 2^{n+1})$ –matrices (2). For example,

$$G_{2^1} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0)}(\mathbf{t}_1) \\ \text{com}_{(1)}(\mathbf{t}_1) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} G_{2^2} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_1,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(a_1,1)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(a_1,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(a_1,1)}(\mathbf{t}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(0,1)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(1,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(1,1)}(\mathbf{t}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_1,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(a_1,1)}(\mathbf{t}_2) \end{bmatrix}_{a_1=0}^1 = \\ &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(0,1)}(\mathbf{t}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(1,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(1,1)}(\mathbf{t}_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2^3} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_2,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,1)}(\mathbf{t}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,0,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,1,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,1,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,0,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,0,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,1,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,1,1)}(\mathbf{t}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_2,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(a_2,1)}(\mathbf{t}_3) \end{bmatrix}_{a_2=0}^3 = \\ &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0,0)}(t) \\ \text{com}_{(0,0,1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,1,0)}(t) \\ \text{com}_{(0,1,1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(1,0,0)}(t) \\ \text{com}_{(1,0,1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(1,1,0)}(t) \\ \text{com}_{(1,1,1)}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

The initial matrix \mathbf{G}_2 is formed by starting with the Fourier-Walsh (2×2) – matrix

$$\mathbf{G}_{2^1} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0)}(\mathbf{t}_1) \\ \text{com}_{(1)}(\mathbf{t}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

and by repeated application of the iteration construction to pairs of rows in the matrix. In $(n + 1)$ th iteration this construction takes each pair

$$\begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \text{ from}$$

$$\mathbf{G}_{2^n} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

and constructs four rows of the twice length

$$\begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

for obtaining two pairs of complementary sequences of twice length:

$$\begin{aligned} \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) &= \begin{pmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n), & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix}, \\ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) &= \begin{pmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n), & -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix}, \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) &= \begin{pmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n), & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix}, \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) &= \begin{pmatrix} -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n), & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obviously,

$$\begin{aligned} \text{COM}_{(a_{n-1},0,0)}(z) &= \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \} = \mathbf{Z} \{ \begin{pmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n), & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix} \} = \\ &= \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \} + z^{2^n} \cdot \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \} = \\ &= \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) + z^{2^n} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z), \\ \text{COM}_{(a_{n-1},0,1)}(z) &= \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \} = \mathbf{Z} \{ \begin{pmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n), & -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix} \} = \\ &= \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \} - z^{2^n} \cdot \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \} = \\ &= \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) - z^{2^n} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z), \\ \text{COM}_{(a_{n-1},1,0)}(z) &= \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \} = \mathbf{Z} \{ \begin{pmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n), & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix} \} = \\ &= \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \} + z^{2^n} \cdot \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \} = \\ &= \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) + z^{2^n} \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z), \\ \text{COM}_{(a_{n-1},1,1)}(z) &= \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \} = \mathbf{Z} \{ \begin{pmatrix} -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n), & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{pmatrix} \} = \\ &= \mathbf{Z} \{ -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \} + z^{2^n} \cdot \mathbf{Z} \{ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \} = \\ &= -\text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) + z^{2^n} \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z). \end{aligned} \quad (7)$$

They are complementary orthogonal sequences. Indeed, for the first pair we have

$$\begin{aligned} & \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,1)}(z) \right|^2 \right) = \\ & = \left[\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) + z^{2^n} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] \left[\overline{\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z)} + \bar{z}^{2^n} \overline{\text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z)} \right] + \\ & + \left[\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) - z^{2^n} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] \left[\overline{\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z)} - \bar{z}^{2^n} \overline{\text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z)} \right] = \\ & = 2 \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) \right|^2 + |z|^{2^{n+1}} \left| \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

For $|z|=1$ we obtain

$$\left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,1)}(z) \right|^2 \right) = 2 \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right|^2 \right) = 2N.$$

Analogously situation is true for the second pair:

$$\left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},1,0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},1,1)}(z) \right|^2 \right) = 2 \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) \right|^2 \right) = 2N.$$

Hence,

$$\begin{aligned} G_{2^{n+1}} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

For example,

$$\begin{aligned} G_{2^1} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0)}(\mathbf{t}_1) \\ \text{com}_{(1)}(\mathbf{t}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ G_{2^2} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(0,1)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(1,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(1,1)}(\mathbf{t}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ G_{2^3} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,0,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,1,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,1,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,0,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,0,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,1,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,1,1)}(\mathbf{t}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Obviously,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ -\text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} = \\
 & = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \right) \boxplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \end{bmatrix} \right) = \\
 & = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \right) \boxplus \\
 & \boxplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \right) = \\
 & = \left(F_2 \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} T_2^0 \right) \boxplus \left(F_2 \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} T_2^1 \right),
 \end{aligned}$$

where $\{T_2^\alpha\}_{\alpha=0}^1$ are operators of dyadic shifts. Using this construction for all complementary pairs in (8), we obtain

$$\begin{aligned}
 G_{2^{n+1}} &= \boxplus_{a_n=0}^{2^n-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \boxplus_{a_{n-1}=0}^{2^{n-1}-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \\
 &= \boxplus_{a_{n-1}=0}^{2^{n-1}-1} \left(\begin{array}{c} F_2 \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} T_2^0 \\ \hline F_2 \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} T_2^1 \end{array} \right) = \\
 &= \boxplus_{a_n=0}^{2^n-1} \left(F_2 \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \cdot \\ \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} T_2^{\alpha_n} \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

So, repetition of this construction $n + 1$ yields the Golay matrix $G_{2^{n+1}}$.

The first generalization of Golay-Rudin-Shapiro sequences

Our the first generalization uses in (8) the following new iteration construction

$$\begin{aligned}
 G_{2^{n+1}} &= \bigoplus_{a_n=0}^{2^n-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \bigoplus_{a_{n-1}=0}^{2^{n-1}-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \\
 &= \bigoplus_{a_{n-1}=0}^{2^{n-1}-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ -\varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

where $\varepsilon_{n+1} = e^{i\varphi_{n+1}}$, for arbitrary φ_n . Now

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \bigoplus \begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ -\varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} = \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \right) \bigoplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & . \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{n+1} \\ 1 & -\varepsilon_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . \\ . & 1 \end{bmatrix} \right) \bigoplus \\
 &\bigoplus \left(\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{n+1} \\ 1 & -\varepsilon_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & 1 \\ 1 & . \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \left(F_2(\varepsilon_{n+1}) \left[\begin{array}{c|c} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ \hline . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{array} \right] T_2^0 \right) \bigoplus \left(F_2(\varepsilon_{n+1}) \left[\begin{array}{c|c} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ \hline . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{array} \right] T_2^1 \right),
 \end{aligned}$$

where $F_2(\varepsilon_{n+1}) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{n+1} \\ 1 & -\varepsilon_{n+1} \end{bmatrix}$.

They are complementary orthogonal sequences. Indeed, for the first pair we have

$$\begin{aligned} & \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,1)}(z) \right|^2 \right) = \\ & = \left[\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) + z^{2^n} \varepsilon_{n+1} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] \left[\overline{\text{COM}}_{(a_{n-1},0)}(z) + \bar{z}^{2^n} \bar{\varepsilon}_{n+1} \overline{\text{COM}}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] + \\ & + \left[\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) - z^{2^n} \varepsilon_{n+1} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] \left[\overline{\text{COM}}_{(a_{n-1},0)}(z) - \bar{\varepsilon}_{n+1} \bar{z}^{2^n} \overline{\text{COM}}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] = \\ & = 2 \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) \right|^2 + \left| \varepsilon_{n+1} \right|^2 \left| z \right|^{2^{n+1}} \left| \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

For $|z|=1$ and $|\bar{\varepsilon}_{n+1}|^2=1$

$$\left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,1)}(z) \right|^2 \right) = 2 \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right|^2 \right) = 2N.$$

Analogously situation is true for the second pair.

Using construction (10) for all complementary pairs in (8) we obtain new multiparametric Golay matrix:

$$\begin{aligned} G_{2^{n+1}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}) &= \bigoplus_{a_n=0}^{2^n-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1} | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1} | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}) \end{bmatrix} = \\ &= \bigoplus_{a_n=0}^{2^n-1} \left(F_2(\varepsilon_{n+1}) \left[\begin{array}{c|c} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) & \cdot \\ \hline \cdot & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \end{array} \right] T_2^{\alpha_n} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

For example,

$$\begin{aligned} G_{2^1} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0)}(\mathbf{t}_1) \\ \text{com}_{(1)}(\mathbf{t}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 \\ 1 & -\varepsilon_1 \end{bmatrix}, \\ G_{2^2} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(0,1)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(1,0)}(\mathbf{t}_2) \\ \text{com}_{(1,1)}(\mathbf{t}_2) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 \\ 1 & \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \varepsilon_1 \\ \hline \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 \end{array} \right], \\ G_{2^3} &= \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,0,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,1,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(0,1,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,0,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,0,1)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,1,0)}(\mathbf{t}_3) \\ \text{com}_{(1,1,1)}(\mathbf{t}_3) \end{bmatrix} = \varepsilon \cdot \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \varepsilon_1 & -\varepsilon_3 \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \varepsilon_2 & -\varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \\ \hline \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \varepsilon_1 & -\varepsilon_3 \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \varepsilon_2 & -\varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 \\ \hline \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 & -\varepsilon_3 \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \varepsilon_2 & -\varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \varepsilon_1 \\ \hline -\varepsilon_3 \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \varepsilon_2 & -\varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

The resulting matrix still has the orthogonal rows and every pair is 2-complementary in the Golay-Rudin-Shapiro sense.

If $\varepsilon_1 = e^{i\varphi_1}, \varepsilon_2 = e^{i\varphi_2}, \dots, \varepsilon_{n+1} = e^{i\varphi_{n+1}} \in \mathbf{C}$ are complex numbers, then $G_{2^{n+1}}$ is the complex-valued (\mathbf{C} -valued) Fourier-Golay-Rudin-Shapiro transform (FGRST), if $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n+1} \in \mathbf{GF}(p)$, then $G_{2^{n+1}}$ is the number theoretical Galois-Golay-Rudin-Shapiro transform (GGRST), if $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n+1} \in \text{Clif}$, where Clif is the Clifford algebra, then $G_{2^{n+1}}$ is the Clifford-Golay-Rudin-Shapiro transform, if $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n+1} \in \text{Ham}$, where Ham is the quaternion Hamilton algebra, then $G_{2^{n+1}}$ is the Yfmilton-Golay-Rudin-Shapiro transform and so on.

The second generalization of Golay-Rudin-Shapiro sequences

In this section, we introduce the second generalized Golay-Rudin-Shapiro sequences. It is based on the following iteration construction (instead of original (8))

$$G_{2^{n+1}} = \bigoplus_{a_n=0}^{2^n-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} = \bigoplus_{a_{n-1}=0}^{2^{n-1}-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} =$$

$$= \bigoplus_{a_{n-1}=0}^{2^{n-1}-1} \begin{bmatrix} \sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

where $c_{n+1} = \cos(\varphi_{n+1}), s_{n+1} = \sin(\varphi_{n+1})$ for arbitrary φ_{n+1} . Now

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -\sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \sqrt{2}c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & \sqrt{2}s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \sqrt{2} \begin{bmatrix} c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \\ s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & -c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \bigoplus \sqrt{2} \begin{bmatrix} s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ -c_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & s_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\sqrt{2} \begin{bmatrix} c_{n+1} & s_{n+1} \\ s_{n+1} & -c_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \right) \bigoplus \left(\sqrt{2} \begin{bmatrix} c_{n+1} & s_{n+1} \\ s_{n+1} & -c_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) & . \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \left(\sqrt{2} \begin{bmatrix} c_{n+1} & s_{n+1} \\ s_{n+1} & -c_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . \\ . & 1 \end{bmatrix} \right) \bigoplus$$

$$\bigoplus \left(\sqrt{2} \begin{bmatrix} c_{n+1} & s_{n+1} \\ s_{n+1} & -c_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & 1 \\ 1 & . \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}CS_2^{n+1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} T_2^0 \right) \bigoplus \left(\sqrt{2}CS_2^{n+1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n) & . \\ . & \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n) \end{bmatrix} T_2^1 \right),$$

$$\text{where } CS_2^{n+1} = \begin{bmatrix} c_{n+1} & s_{n+1} \\ s_{n+1} & -c_{n+1} \end{bmatrix} = CS_2^{n+1}(\varphi_{n+1}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{n+1} & \sin \varphi_{n+1} \\ \sin \varphi_{n+1} & -\cos \varphi_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Using this construction for all complementary pairs in (8), we obtain new multiparametric Golay matrix:

$$G_{2^{n+1}}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}) = \bigoplus_{a_n=0}^{2^n-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_n,0)}(\mathbf{t}_{n+1} | (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)) \\ \text{com}_{(a_n,1)}(\mathbf{t}_{n+1} | (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)) \end{bmatrix} = \bigoplus_{a_n=0}^{2^n-1} \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},0,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,0)}(\mathbf{t}_{n+1}) \\ \text{com}_{(a_{n-1},1,1)}(\mathbf{t}_{n+1}) \end{bmatrix} =$$

$$= \bigoplus_{a_n=0}^{2^n-1} \left(\sqrt{2} CS_2^{n+1}(\varphi_{n+1}) \begin{bmatrix} \text{com}_{(a_{n-1},0)}(\mathbf{t}_n | (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)) & \vdots \\ \vdots & \varepsilon_{n+1} \cdot \text{com}_{(a_{n-1},1)}(\mathbf{t}_n | (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)) \end{bmatrix} T_2^{a_n} \right).$$

They are complementary orthogonal sequences. Indeed, for the first pair we have

$$\begin{aligned} & \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,1)}(z) \right|^2 \right) = \\ & = 2 \left[c_{n+1} \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) + z^{2^n} s_{n+1} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] \left[c_{n+1} \overline{\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z)} + \bar{z}^{2^n} s_{n+1} \overline{\text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z)} \right] + \\ & + \left[s_{n+1} \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) - z^{2^n} c_{n+1} \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right] \left[s_{n+1} \overline{\text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z)} - \bar{z}^{2^n} c_{n+1} \overline{\text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z)} \right] = \\ & = 2 \left((c_{n+1}^2 + s_{n+1}^2) \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) \right|^2 + |z|^{2^{n+1}} (c_{n+1}^2 + s_{n+1}^2) \left| \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

For $|z|=1$ and $(c_{n+1}^2 + s_{n+1}^2) = 1$

$$\left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},0,1)}(z) \right|^2 \right) = 2 \left(\left| \text{COM}_{(a_{n-1},0)}(z) \right|^2 + \left| \text{COM}_{(a_{n-1},1)}(z) \right|^2 \right) = 2N.$$

Analogously situation is true for the second pair.
Let us consider examples,

$$G_{2^1} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0)}(\mathbf{t}_1 | \varphi_1) \\ \text{com}_{(1)}(\mathbf{t}_1 | \varphi_1) \end{bmatrix} = (\sqrt{2})^1 \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ s_1 & -c_1 \end{bmatrix},$$

$$G_{2^2} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0)}(\mathbf{t}_2 | \varphi_1, \varphi_2) \\ \text{com}_{(0,1)}(\mathbf{t}_2 | \varphi_1, \varphi_2) \\ \text{com}_{(1,0)}(\mathbf{t}_2 | \varphi_1, \varphi_2) \\ \text{com}_{(1,1)}(\mathbf{t}_2 | \varphi_1, \varphi_2) \end{bmatrix} = (\sqrt{2})^2 \begin{bmatrix} c_2 c_1 & c_2 s_1 & s_2 s_1 & -s_2 c_1 \\ s_2 c_1 & s_2 s_1 & -c_2 s_1 & c_2 c_1 \\ s_2 s_1 & -s_2 c_1 & c_2 c_1 & c_2 s_1 \\ -c_2 s_1 & c_2 c_1 & s_2 c_1 & s_2 s_1 \end{bmatrix},$$

$$G_{2^3} = \begin{bmatrix} \text{com}_{(0,0,0)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \text{com}_{(0,0,1)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \text{com}_{(0,1,0)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \text{com}_{(0,1,1)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \text{com}_{(1,0,0)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \text{com}_{(1,0,1)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \text{com}_{(1,1,0)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \text{com}_{(1,1,1)}(\mathbf{t}_3 | \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \end{bmatrix} =$$

$$= (\sqrt{2})^2 \begin{bmatrix} c_3c_2c_1 & c_3c_2s_1 & c_3s_2s_1 & -c_3s_2c_1 & s_3s_2c_1 & s_3s_2s_1 & -s_3c_2s_2 & s_3c_2c_1 \\ s_3c_2c_1 & s_3c_2s_1 & s_3s_2s_1 & -s_3s_2c_1 & -c_3s_2c_1 & -c_3s_2s_1 & c_3c_2s_2 & -c_3c_2c_1 \\ s_3s_2c_1 & s_3s_2s_1 & -s_3c_3c_2 & s_3c_2s_2 & c_3c_2c_1 & c_3c_2s_1 & c_3s_2s_1 & -c_3s_2c_1 \\ -c_3s_2c_1 & -c_3s_2s_1 & c_3c_2s_2 & -c_3c_2c_1 & s_3c_2c_1 & s_3c_2s_1 & s_3s_2s_1 & -s_3s_2c_1 \\ c_3s_2s_1 & -c_3s_2c_1 & c_3c_2c_1 & c_3c_2s_1 & -s_3c_2s_1 & s_3c_2c_1 & s_3s_2c_1 & s_3s_2s_1 \\ s_3s_2s_1 & -s_3s_2c_1 & s_3c_2c_1 & s_3c_2s_1 & c_3c_2s_1 & -c_3c_2c_1 & -c_3s_2c_1 & -c_3s_2s_1 \\ -s_3c_2s_1 & s_3c_2c_1 & s_3s_2c_1 & s_3s_2s_1 & c_3s_2s_1 & -c_3s_2c_1 & c_3c_2c_1 & c_3c_2s_1 \\ c_3c_2s_1 & -c_3c_2c_1 & -c_3s_2c_1 & -c_3s_2s_1 & s_3s_2s_1 & -s_3s_2c_1 & s_3c_2c_1 & s_3c_2s_1 \end{bmatrix}.$$

The resulting matrix still has the orthogonal rows and every pair is 2-complementary in the Golay-Rudin-Shapiro sense.

Conclusions

In this paper, we have shown a new unified approach to the so-called generalized complex- $\mathbf{GF}(p)$ - and Clifford-valued complementary sequences. The approach is based on a new iteration generating construction. This construction has a rich algebraic structure. This construction is associated not with the triple $(\mathbf{Z}_2^n, \mathcal{F}_2, \mathbf{C})$ but rather with other groups instead of \mathbf{Z}_2^n , other unitary transforms instead of \mathcal{F}_2 , and other algebras (Clifford algebras), finite rings (\mathbf{Z}_m) and finite Galois fields ($\mathbf{GF}(q)$) instead of the complex field

Acknowledgment

This work was supported by grants the RFBR № 17-07-00886, № 17-29-03369 and by Ural State Forest Engineering's Center of Excellence in "Quantum and Classical Information Technologies for Remote Sensing Systems".

References

- Budisin S.Z.* New complementary pairs of sequences // Electron. Lett. 1990. Vol. 26. P. 881-883.
- Byrne J.S.* Quadrature mirror filters, low crest factor arrays, functions achieving optimal uncertainty principle bounds, and complete orthonormal sequences — a unified approach // Applied and Computational Harmonic Analysis, 1994. P. 261-264.
- Davis J.A., Jedwab J.* Peak-to-Mean Power Control in OFDM, Golay Complementary Sequences, and Reed-Muller Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. Vol. IT.45. No. 7. P. 2397-2417.
- Eliahou S., Kervaire M., and Saffari B.* A new restriction on the lengths of Golay complementary sequences // J. Combin. Theory (A). 1990. Vol. 55. P. 49-59.
- Fan P. and Darnell M.* Sequence Design for Communications Applications (Communications Systems, Technologies and Applications). Taunton, 1996. U.K.: Res. Studies.
- Golay M.J.E.* Multislit spectrometry // J. Optical Society Am., 1949. P. 39-43.
- Golay M.J.E.* Complementary series // IRE Trans. Information Theory. 1961. Vol. IT-7. P. 82-87.

Golay M.J.E. Sieves for low autocorrelation binary sequences // IEEE Trans. Inform. Theory, IT.23, 1977. P. 43-51.

Rudin W. Some theorems on Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 10. P. 855-859.

Shapiro H.S. Extremal problems for polynomials and power series. ScM.Thesis, Massachusetts Institute of Technology. 1951.

Shapiro H.S. A power series with small partial sums // Notices of the AMS. 1958. Vol. 6 (3). P. 366-378.

Sivaswamy R. Multiphase complementary codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1978. Vol. IT.24. P. 546-552.

Turyn R.J. Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four-symbol sequences, pulse compression, and surface wave encodings // J. Combin. Theory (A). 1974. Vol. 16. P. 313-333.

Рецензент статьи: доктор технических наук, профессор Института радиоэлектроники и информационных технологий Уральского федерального университета Л.Г. Доросинский.